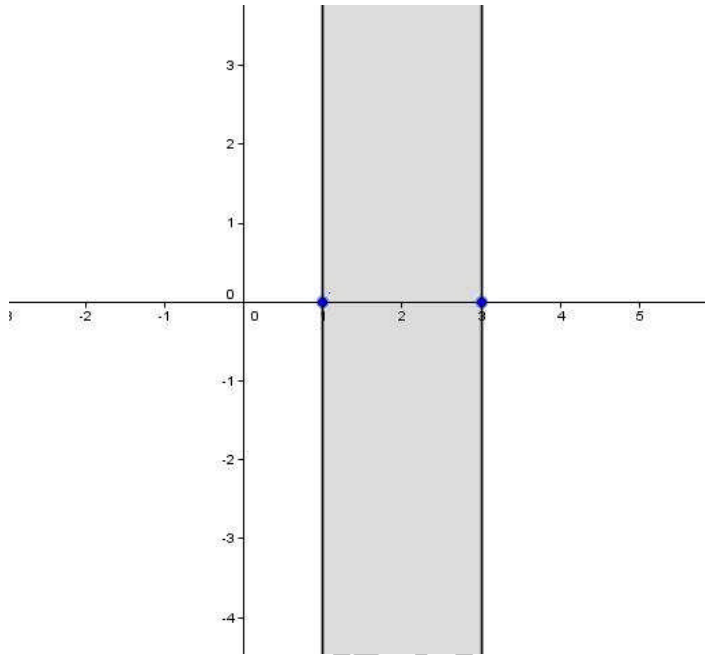


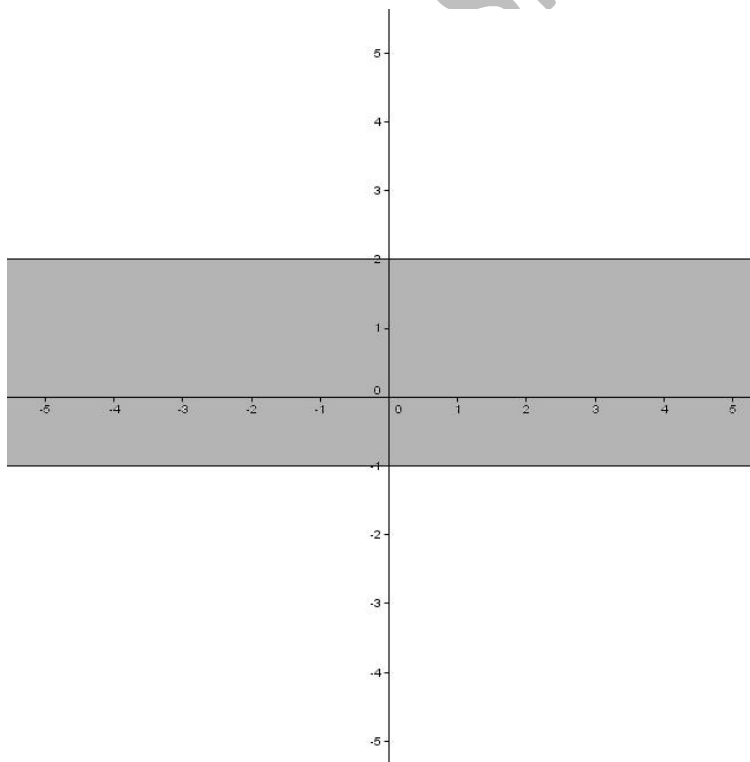
Rešitev nalog - maturitetna pola
Jesen 2007 (28. avgust 2007)
Osnovna raven

1. V koordinatni sistem narišite množico točk $T(x, y)$, ki ustreza pogojema $1 \leq x \leq 3$ in $-1 \leq y \leq 2$. Osenčite nastali lik in izračunajte njegovo ploščino.

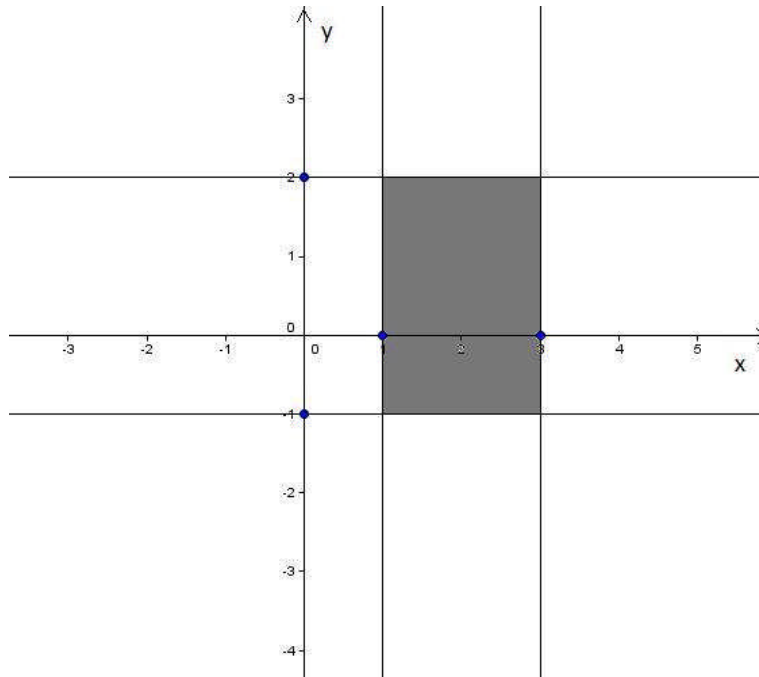
Najprej narišemo množico točk, ki ustreza pogojju $1 \leq x \leq 3$



Nato še drugo množico točk, ki ustreza pogojju $-1 \leq y \leq 2$.



Množica točk, ki ustreza **obema** pogojevema je **preseka** prve in druge množice:



Nastali lik je pravokotnik, njegova ploščina je produkt dolžin obeh stranic. Dolžini stranic preberemo iz slike: 2 in 3. Tako je ploščina lika:

$$S = 2 \cdot 3 = 6$$

2. V enakokrakem trikotniku ABC so dolžine stranic $c = |AB| = 4\text{ cm}$, $a = |BC| = |CA| = 6\text{ cm}$. Izračunajte ploščino trikotnika in kot $\beta = \sphericalangle ABC$. Zapišite natančno vrednost ploščine, kot β pa zaokrožite na stotinko stopinje.

Narišemo skico trikotnika. Zarišemo tudi višino na osnovnico, ki osnovnico **razpolavlja**.

Ploščina trikotnika je:

$$S = \frac{cv_c}{2}$$

Višino na stranico c izračunamo s pomočjo

Pitagorovega izreka:

$$a^2 = v_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Izrazimo višino

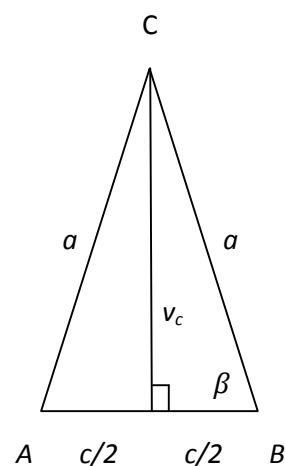
$$v_c^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$v_c^2 = 36 - 4$$

$$v_c = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Še ploščina:

$$S = \frac{cv_c}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$



S pomočje kotne funkcije sinus izrazimo kot β :

$$\sin \beta = \frac{v_c}{a}$$

Kot dobimo s pomočjo inverzne funkcije:

$$\beta = \arcsin \frac{v_c}{a} = 70,53^\circ$$

3. Izračunajte odvode funkcij: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2 \sin x$, $h(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Odvod funkcije $h(x)$ poenostavite.

Prvo funkcijo lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

In odvajamo po pravilu za odvod potenčne funkcije $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

V drugem primeru računamo po pravilu za odvod produkta:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$g'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

V tretjem primeru pa gre za odvod kvocienta, pogledjmo formulo:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

4. V kompleksni ravnini nariši sliko kompleksnega števila $z = 2 - 3i$. Koliko je absolutna vrednost tega kompleksnega števila? Izračunajte z^2 in $\frac{1}{z}$.

Kompleksna ravnina realno os – Re (vodoravna) in imaginarno os – Im (navpična). Koordinati preberemo iz zapisa kompleksnega števila, ki je ponavadi v obliki:

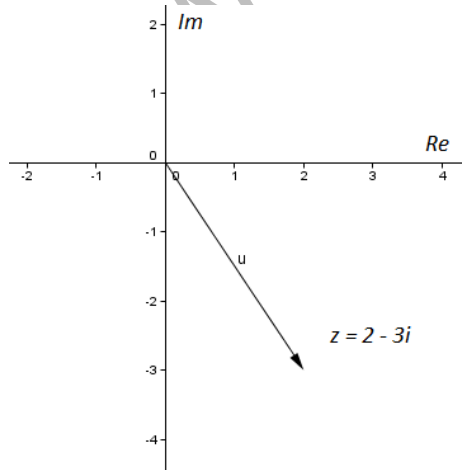
$$z = a + bi$$

Realna komponenta je število a , imaginarna pa število b .

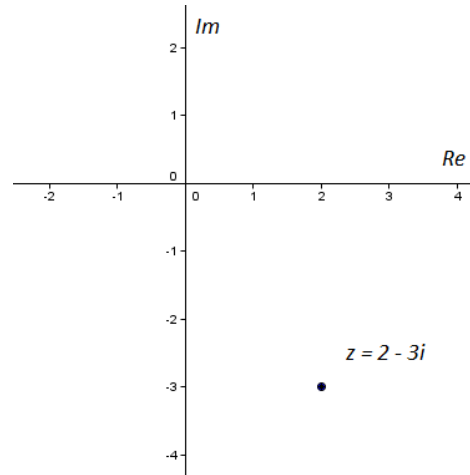
V tem primeru je število $z = 2 - 3i$ in $a = 2$ in $b = -3$.

Kompleksno število lahko prikažemo na dva načina:

1. način:



2. način:



Absolutna vrednost kompleksnega števila je:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Kvadrat kompleksnega števila je:

$$z^2 = (2 - 3i)^2 = 4 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

Pri tem smo upoštevali, da je $i^2 = -1$ (definicija števila i)

Obratna vrednost kompleksnega števila pa je:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 3i}$$

Če želimo zapisati to v obliki

$$z = a + bi$$

Se moramo znebiti imaginarne komponente v ulomku. To se zgodi, če razširimo ulomek s **konjugiranim** številom danega kompleksnega števila. Konjugirani kompleksni števili se razlikujeta **zgolj** v imaginarni komponenti, konjugirani kompleksni števili sta npr. $2 - 3i$ in $2 + 3i$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{1(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

5. Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ poteka skozi točke $A(-1,0)$, $B(0,1)$ in $C(1,5)$. Izračunajte števila a , b in c ter zapišite predpis funkcije f .

Za vse koordinati (x, y) vseh točk, ki ležijo na dani paraboli, velja:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Za vsako točko lahko zapišemo svojo enačbo, če vstavimo njeni koordinati v zgornjo enačbo.

A: $a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

B: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

C: $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5 \Rightarrow a + b + c = 5$

Iz druge enačbe vidimo, da je $c = 1$. Vstavimo to vrednost v prvo in tretjo enačbo in dobimo:

$$a - b + 1 = 0$$

$$a + b + 1 = 5$$

Sedaj se želimo »znebiti« ene od neznank, recimo b -ja. Seštejemo enačbi

$$\left. \begin{array}{l} a - b = -1 \\ a + b = 4 \end{array} \right\} +$$

$$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

To rešitev vstavimo v eno od zgornjih enačb, recimo

$$a - b = 1$$

$$\frac{3}{2} - b = 1 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Zapišemo še predpis za funkcijo:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

6. V dani koordinatni sistem narišite hiperbolo $4x^2 - y^2 = 4$ (narišite tudi asimptoti). Izračunajte in zapišite presečišči hiperbole in premice $y = x + 1$.

Enačba hiperbole s središčem v $S(0,0)$ ima obliko:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Število a je realna polos hiperbole, število b pa imaginarna polos hiperbole. Temeni hiperbole sta točki $T_1(-a, 0)$, $T_2(a, 0)$, premici $y = \pm \frac{b}{a}x$ pa asimptoti hiperbole. Gorišči hiperbole sta točki $F_1(-e, 0)$ in $F_2(e, 0)$, kjer velja za e :

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Enačbo dane hiperbole najprej delimo s 4:

$$4x^2 - y^2 = 4 \quad /: 4$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Vidimo, da je $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ in $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

$$e^2 = 1 + 4 = 5$$

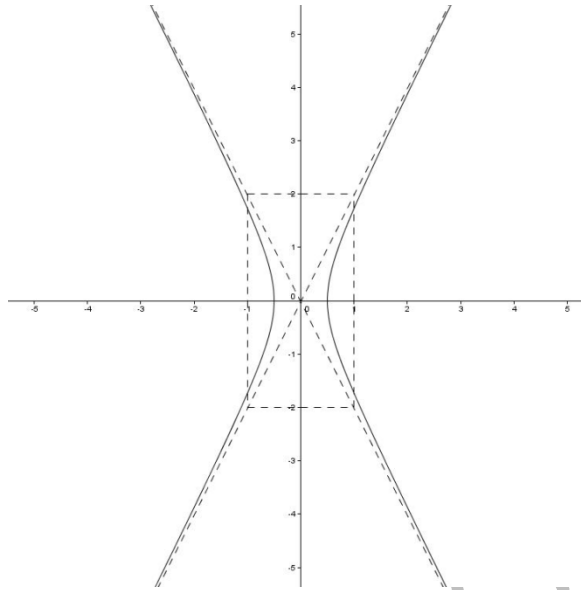
$$e = \sqrt{5} \cong 2,236$$

Temeni hiperbole sta tako: $T_1(-2,0)$, $T_2(2,0)$.

Gorišči hiperbole sta: $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ in $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

Enačbi asimptot: $y = \pm \frac{2}{1}x = \pm 2x$

Graf hiperbole : $4x^2 - y^2 = 4$



Presečišče s premico dobimo tako, v enačbo hiperbole $4x^2 - y^2 = 4$ namesto spremenljivke y vstavimo enakost, ki velja za premnico; $y = x + 1$. Dobimo:

$$4x^2 - (x + 1)^2 = 4$$

$$4x^2 - x^2 - 2x - 1 = 4$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

Malo bolj večji razstavimo po Vietovem pravilu, ostali si pomagajte z enačbo za ničli kvadratne funkcije:

1.način:

$$(3x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -1$$

2.način:

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{6} = \frac{2 + 8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{6} = \frac{2 - 8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Hiperbola in premica imata 2 presečišči, izračunati moramo še y_1 in y_2 .

Vstavimo x_1 in potem še x_2 v enačbo premice $y = x + 1$:

$$y_1 = x_1 + 1 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

$$y_2 = x_2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Presečišči hiperbole in premice sta: $P_1(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$ in $P_2(-1, 0)$.

7. Rešite enačbo $\log_x(x + 30) = 2$.

Eden od načinov je, da zapišemo izraz na desni strani enačbe ($= 2$) v obliki \log_x .

$$\log_x(x + 30) = \log_x x^2$$

Logaritma imata enako osnovo, zato morata bit logaritmanda enaka, če naj bo leva stran enačbe enaka desni.

$$x + 30 = x^2$$

Dobimo kvadratno enačbo, ki jo rešimo po Viétovem pravilu:

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x - 6)(x + 5) = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -5$$

Ker pa rešujemo logritemsko enačbo, moramo preveriti ustreznost rešitev. Pri logaritmu pazimo, da niti logarimtand (tisto, kar »pride za logaritmom«) niti osnova nista negativna, saj takrat logaritemaska funkcija ni smiselna. Prva rešitev $x_1 = 6$ je ustrezna, druga $x_2 = -5$ pa ne, saj pomeni negativno osnovo logaritma.

8. V aritmetičnem zaporedju $a_1, a_2, 2, a_4, 8 \dots$ izračunajte a_1, a_2, a_4, a_{671} in vsoto prvih 671 členov.

Podan imamo prvi in tretji člen aritmetičnega zaporedja,

$$a_3 = 2, a_5 = 8$$

V aritmetičnem zaporedju je razlika poljubnih sosednjih členov konstantna, to razliko imenujemo diferenca, d . $d = a_{n+1} - a_n$

Vemo tudi, da je v aritmetičnem zaporedju vsak člen (razen prvega) aritmetična sredina sosednjih dveh členov. Tako lahko izračunamo četrti člen:

$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

Vidimo ali izračunamo diferenco (razliko) zaporedja $d = 3$.

Tako zapišemo še prvi in drugi člen zaporedja

$$a_1 = -4, a_2 = -1$$

Formula za poljubni člen aritmetičnega zaporedja je:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{671} = -4 + (671 - 1)3 = -4 + 2100 = 2006$$

Vsoto poljubnega števila členov aritmetičnega zaporedja zapišemo kot:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{ali} \quad S_1 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

Ker poznamo prvi (a_1) in zadnji člen (a_{671}) uporabimo prvo formulo:

$$S_{671} = \frac{671}{2}(-4 + 2006) = 671671$$

9. Pokažite, da je za vsak x vrednost izraza $\sin 2x + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ enaka 1.

Izraz preoblikujemo s pomočjo formule za dvojni kot in adicijskega izreka:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2x + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x \cos x + 2(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4})^2 =$$

Upoštevamo, da je $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in dobimo:

$$= 2 \sin x \cos x + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)^2 =$$

$$= 2 \sin x \cos x + 2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)^2\right) =$$

$$= 2 \sin x \cos x + 2\left(\frac{2}{4} \sin^2 x - 2 \cdot \frac{2}{4} \sin x \cos x + \frac{2}{4} \cos^2 x\right) =$$

$$= 2 \sin x \cos x + 2\left(\frac{2}{4} \sin^2 x - 2 \cdot \frac{2}{4} \sin x \cos x + \frac{2}{4} \cos^2 x\right) =$$

$$= 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

S tem smo dokazali, da je vrednost izraza, za poljubno vrednost spremenljivke x , enaka 1.

10. V posodi so 4 modre in 6 rumenih kroglic. Iz posode na slepo izvlečemo 2 kroglici. Izračunajte verjetnost, da sta tako dobljeni kroglici enake barve.

Verjetnost dogodka A izračunamo kot kvocient števila za dogodek A ugodnih izidov z vsemi možnimi izidi.

$$P(A) = \frac{\text{število za dogodek A ugodnih izidov}}{\text{število vseh možnih izidov}} = \frac{m}{n}$$

Najprej definirajmo za dogodek A ugoden izid. To je izid, pri katerem povlečemo 2 modri ali 2 rumeni kroglici.

Če povlečemo 2 modri kroglici od 4-ih, pri čemer kroglice **niso** oštevilčene, gre za kombinacije:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$$

Če povlečemo 2 rumeni kroglici od 6-ih, pri čemer kroglice **niso** oštevilčene, gre za kombinacije:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$$

Ker izida nista povezana (povlečemo 2 modri **ali** 2 rumeni), je potrebno število načinov za oba izida **sešteti**:

$$m = 6 + 15 = 21$$

Koliko pa je vseh možnih načinov, na katere lahko naključno potegnemo 2 kroglici od 10-ih?

$$n = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45$$

Verjetnost dogodka A, da bomo izbrali dve kroglici istih barv je:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

11. Dan je vektor $\vec{a} = (-2, 1)$. Izračunajte točno dolžino vektorja \vec{a} . Zapišite komponenti vektorja \vec{b} , če je $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$ in $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

Formula za dolžino vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2)$, katerega koordinate poznamo ni težavna:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Vstavimo vrednosti za vektor $\vec{a} = (-2, 1)$ in dobimo dolžino vektorja \vec{a} :

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Iščemo še koordinati vektorja \vec{b} , zapišemo ga z neznanimi koordinatami $\vec{b} = (x, y)$, pri čemer bomo izračunali x in y .

Izkoristimo enačbo za skalarni produkt dveh vektorjev:

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ in } \vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

V tem primeru velja:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 1) \cdot (x, y) = -2x + y$$

Iz podatkov naloge pa vemo, da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

Iz obeh enačb preberemo: $-2x + y = -10 \Rightarrow y = 2x - 10$

Poznamo pa tudi dolžino vektorja $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$. Če to izrazimo z enačbo za dolžino vektorja, dobimo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5} \quad / \cdot 2$$

Obe strani enačbe kvadriramo

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

Dobili smo dve enačbi, ki povezujeta x in y koordinati vektorja \vec{b} .

$$y = 2x - 10$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

Zgornjo enačbo vstavimo v spodnjo:

$$x^2 + (2x - 10)^2 = 20$$

In uredimo enačbo

$$x^2 + 4x^2 - 40x + 100 = 20$$

$$5x^2 - 40x + 80 = 0 \quad /: 5$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)(x - 4) = 0$$

Rešitvi enačbe sta enaki: $x_1 = x_2 = 4$

To rešitev vstavimo v eno od zgornjih enačb, npr.

$$y = 2x - 10$$

$$y_1 = 2 \cdot 4 - 10 = -2$$

In že imamo koordinati x in y vektorja $\vec{b} = (4, -2)$

12. Število $a = 1, \overline{24}$ zapišite v obliki okrajšanega ulomka. Za dano število a izračunajte vrednost izraza $(1 - a^{-1})^{-1}$. Rezultat zapišite v obliki okrajšanega ulomka. Nalogo rešite brez uporabe žepnega računalnika.

$$a = 1, \overline{24}$$

Enačbo pomnožimo s 100 in dobimo:

$$100a = 124, \overline{24}$$

Če od te enačbe odštejemo prvotno, se periodični decimalni del odšteje oz. »odpade«.

$$\left. \begin{array}{l} 100a = 124, \overline{24} \\ \underline{a = 1, \overline{24}} \end{array} \right\} -$$

$$99a = 123 \Rightarrow a = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$$

Izračunamo še vrednost izraza za $a = \frac{41}{33}$:

$$(1 - a^{-1})^{-1} = \left(1 - \left(\frac{41}{33}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{33}{41}\right)^{-1} = \left(\frac{41-33}{41}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{41}\right)^{-1} = \frac{41}{8}$$

S tem je naloga rešena.

Rešil:

Rok Strehovec
Simpleks 5, Instrukcije, tečaji in priprave na maturo
Okiškega 24A
1000 Ljubljana
www.simpleks-5.si
info@simpleks-5.si